INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE.

**Juin 1977. — Option MATHÉMATIQUES**

# PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

1° Dans tout le problème, le corps de base est celui des nombres réels.

2° La partie II est indépendante de la partie I, exception faite du 3° de la partie II qui exige l'étude de la partie I.

La partie III est indépendante de la partie II; elle ne dépend pas non plus de la partie I exception faite du 4°, *i*.

3° Le symbole Log $x$ désigne le logarithme népérien de $x$; $e$ désigne la base des mêmes logarithmes.



4° Soient deux entiers naturels A et B supérieurs ou égaux à 2, donnés par leur décomposition en produit de facteurs premiers :

$$A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad \text{avec} \quad 2 \leqslant p_1 < p_2 < \dots < p_k$$
$$\text{et}, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, p_i \text{ premier}, \alpha_i \geqslant 1$$
$$B = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l}, \quad \text{avec} \quad 2 \leqslant q_1 < q_2 < \dots < q_l$$
$$\text{et}, \forall j \in \{1, 2, \dots l\}, q_j \text{ premier}, \beta_j \geqslant 1$$

Nous dirons que A et B sont *composés des mêmes facteurs premiers* si et seulement si :

$$\{p_1, p_2, \dots p_k\} = \{q_1, q_2, \dots q_l\}$$

## PARTIE I

1° On pose :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Déterminer le domaine de définition, $\mathcal{D}_f$, de $f$.

Calculer $f'(x)$ et $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = u(x)$.

Étudier le signe de $u(x)$ : on devra pour cela étudier les variations de cette fonction.

En déduire le tableau de variation de $f$.

2° Calculer $f''(x)$ et $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = v(x)$.

Quel est le signe de $v(x)$ si $x < -1$ ?

On suppose $x > 0$. Montrer que l'on peut écrire l'égalité :

$$v(x) = m_1(x) \cdot m_2(x),$$

où :

$$m_1(x) = u(x) + h(x)$$
$$m_2(x) = u(x) - h(x)$$

$h$ désignant une fonction *très simple*, positive, que l'on exprimera.

Déterminer le signe de $m_1(x)$ et celui de $m_2(x)$. En déduire celui de $f''(x)$.

.../...

3° Dessiner le graphe, (C), de $f$. On précisera notamment, s'il y a lieu, la ou les tangentes remarquables.

4° On pose :

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

Déterminer le domaine de définition, $\mathcal{D}_g$, de $g$.

Montrer que le graphe (Γ) de $g$ est symétrique de (C) par rapport à une droite que l'on précisera. En déduire le dessin de (Γ), dont on précisera, en particulier, le sens de concavité et la ou les tangentes remarquables.

5° On pose, $n$ désignant un entier strictement positif,

$$a_n = f(n), \quad b_n = g(n).$$

Déduire de ce qui précède l'étude des suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$.

6° Comparer $a_n^{b_n}$ et $b_n^{a_n}$.

## Partie II

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $Ox$, $Oy$.

On se propose dans cette partie d'étudier l'ensemble (K) des points dont les coordonnées $(x, y)$ vérifient le système de conditions :

(S) $$x^y = y^x, \quad x \neq y, \quad x > 0, \quad y > 0$$

1° Étudier l'intersection de (K) avec la droite d'équation $y = tx$. En déduire une représentation paramétrique de (K). Soit :

$$x = r(t), \quad y = s(t)$$

cette représentation paramétrique.

2° On appelle A le point de coordonnées $(e, e)$ et on pose :

$$(\bar{K}) = (K) \cup \{A\}$$

Montrer que $(\bar{K})$ admet un axe de symétrie que l'on précisera.



Construire $(\bar{K})$. On justifiera soigneusement, en particulier, le mode d'étude du signe de $r'(t)$ et $s'(t)$.

Étudier l'allure de $(\bar{K})$ au voisinage de A, en précisant la tangente en A à $(\bar{K})$ et la position de $(\bar{K})$ par rapport à sa tangente.

Calculer $m(t) = \dfrac{s'(t)}{r'(t)}$, puis $m'(t)$ et étudier son signe.

Les candidats vérifieront tout d'abord que le signe de $m'(t)$ est celui du produit $\mu(t) \cdot \nu(t)$, où :

$$\mu(t) = \operatorname{Log} t - t + \frac{1}{t} + \left(1 - \frac{1}{t}\right)\sqrt{t^2 - t + 1},$$

$$\nu(t) = \operatorname{Log} t - t + \frac{1}{t} - \left(1 - \frac{1}{t}\right)\sqrt{t^2 - t + 1}.$$

Ils devront ensuite étudier les fonctions $\mu$ et $\nu$.

N.B. — *Il est recommandé aux candidats qui jugeraient cette question trop difficile de ne pas y perdre trop de temps, de façon à ne pas sacrifier l'étude de la partie III.*

En déduire le sens de concavité de $(\bar{K})$, que l'on dessinera soigneusement.

3° Quel lien voyez-vous entre les fonctions $r$ et $s$ de la partie II, d'une part, et les fonctions $f$ et $g$ de la partie I, d'autre part?

## Partie III

On se propose dans cette partie de déterminer les couples de *rationnels* $(x, y)$ vérifiant le système de conditions :

($S_1$) $$x^y = y^x, \qquad 0 < x < y$$

[il revient au même de dire que l'on cherche les *points rationnels* de (K)].

1° Vérifier que le couple d'entiers défini par $x = 2$, $y = 4$ vérifie ($S_1$).



X 107 X

2° Montrer que le couple précédent est *le seul* couple d'entiers vérifiant $(S_1)$. On pourra pour cela écrire l'équation $x^y = y^x$ sous la forme :

$$\frac{\text{Log } x}{x} = \frac{\text{Log } y}{y}$$

puis étudier les variations de la fonction $\Phi$ définie par

$$\Phi(t) = \frac{\text{Log } t}{t} .$$

3° On se propose dans cette question de retrouver le résultat du 2° en n'utilisant que des méthodes purement arithmétiques, à l'exclusion de tout recours à l'analyse.

*a.* On suppose que $x^y = y^x$, $0 < x < y$, $x$ et $y$ étant deux entiers.

Montrer que $x \geqslant 2$ et $y \geqslant 3$.

Montrer que $x$ et $y$ sont composés des mêmes facteurs premiers.

Montrer ensuite que $x$ divise $y$.

*b.* Soit donc $y = tx$, $t$ désignant un entier supérieur ou égal à 2, $x$ et $y$ vérifiant toujours $(S_1)$.

Posons $t = 1 + h$ : on a $h \geqslant 1$, $h$ étant entier. Montrer que :

$$x^h = 1 + h$$

Montrer ensuite, en posant $x = 1 + a$ $(a \geqslant 1)$ que l'on a nécessairement $a = 1$ et $h = 1$. En déduire que le couple $x = 2$, $y = 4$ est la seule solution (ce qui constitue le résultat du 2° obtenu cette fois par un procédé arithmétique).

4° On recherche maintenant les couples $(x, y)$ de rationnels *non tous deux entiers* vérifiant $(S_1)$. On pose :

$x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p}{q}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ étant deux fractions irréductibles.

*a.* Montrer les égalités :

$$p^{p_1 q} = p_1^{p q_1} , \qquad q^{p_1 q} = q_1^{p q_1}$$

*b.* Montrer que $q \geqslant 2$, $q_1 \geqslant 2$, puis que $q < q_1$.

Montrer que $q$ et $q_1$ sont composés des mêmes facteurs premiers.



X801X

Montrer enfin que $q$ divise $q_1$. Ce qui permet dans la suite de poser $q_1 = nq$, $n$ désignant un entier vérifiant $n \geqslant 2$.

*c.* Montrer de même que $p \geqslant 2, p_1 \geqslant 2$ et que $p_1 = n'p$, $n'$ désignant un entier vérifiant $n' \geqslant 2$.

*d.* Montrer que $n' > n$.

*e.* Montrer que $p$ et $n'$ sont composés des mêmes facteurs premiers, que $q$ et $n$ sont composés des mêmes facteurs premiers, puis que $n$ et $n'$ sont premiers entre eux.

*f.* Montrer que $p = t^n$, que $q = r^n$, $t$ et $r$ étant deux entiers tels que $t \geqslant 2$ et $r \geqslant 2$, puis que :

$$n = r^{n'-n} , \qquad n' = t^{n'-n}$$

*g.* A l'aide des résultats de *f.*, montrer que :

$$n' - n = 1$$

*h.* Calculer $p, q, p_1, q_1$ en fonction du seul entier $n$.

*i.* Comparer le résultat trouvé à celui du I.6°.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail